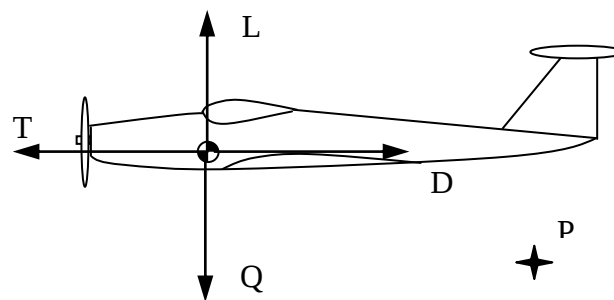


MOMENTI E CENTRAGGIO DEL VELIVOLO

Per il calcolo delle prestazioni in volo orizzontale rettilineo ed uniforme, il velivolo può essere pensato come un punto materiale, e di un punto non si può osservare alcuna rotazione. Di conseguenza l'equilibrio alla rotazione non viene considerato. Le componenti delle forze agenti sul velivolo,

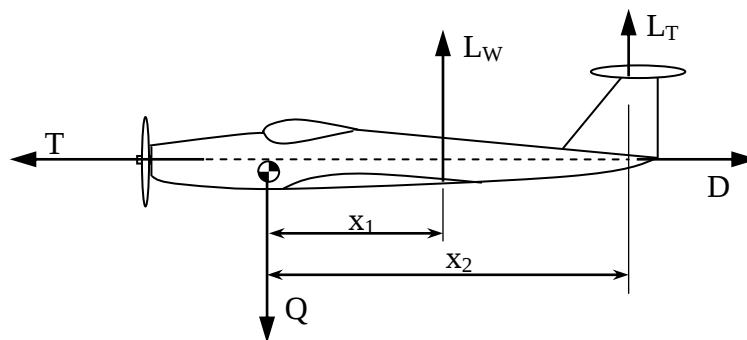
- Peso e Portanza
- Resistenza e Trazione

sono pensate come applicate ad un unico punto, in particolare al baricentro del velivolo.



In questo schema nessun momento è applicato al velivolo: non rispetto al baricentro, ma neppure rispetto ad un qualsiasi punto P. Se infatti calcoliamo il momento totale delle forze agenti rispetto al punto P in figura, il momento della portanza è uguale e opposto a quello del peso, e ciò è analogo per la trazione e la resistenza.

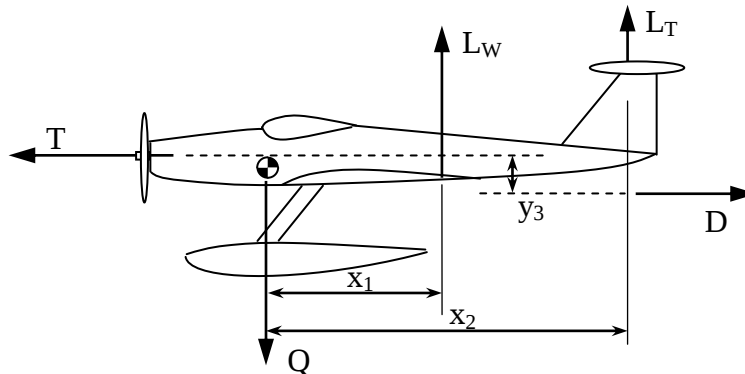
In realtà, le forze aerodinamiche e la trazione *non* sono applicate al baricentro del velivolo.



In molti casi, è possibile assumere che la trazione, applicata lungo l'asse dei propulsori, e la resistenza aerodinamica, originata dalle componenti orizzontali della distribuzione delle pressioni e delle forze viscose sulla superficie velivolo, siano allineate.

La portanza – la componente della forza aerodinamica perpendicolare alla velocità del vento relativo – è in massima parte originata dalle distribuzioni di pressione sulle superfici aerodinamiche dell'ala e dei piani di coda. La portanza originata dall'ala ha una retta di applicazione che varia al variare dell'incidenza (e quindi del coefficiente di portanza, e quindi della velocità di volo). Possiamo indicare la posizione della retta di applicazione fornendo la distanza x_1 fra essa ed il baricentro. Analogamente possiamo indicare, per il piano di coda, la distanza x_2 fra il punto di applicazione della portanza originata dalla distribuzione di pressione sulla sua superficie di coda e il baricentro.

ESERCIZIO 1 – Calcolo della portanza del piano di coda dato l'assetto ed i punti di applicazione delle forze aerodinamiche



Calcolare la portanza che deve generare il piano di coda per mantenere il velivolo in equilibrio alla rotazione, data la condizione di volo.

Superficie alare: $S = 101.35 \text{ m}^2$

Condizione di volo: $V = 86.31 \text{ m/s}$

$$\delta = \rho/\rho_0 = 0.8216$$

$$C_{L \text{ ALA}} = 0.53$$

$$C_{D \text{ VEL}} = 0.032$$

Posizioni delle forze aerodinamiche: $x_1 = 0.707 \text{ m}$
 $x_2 = 12.540 \text{ m}$
 $y_3 = 0.610 \text{ m}$

SOLUZIONE

Densità: $\rho = \delta \rho_0 = 0.8216 \cdot 1.225 \text{ Kg/m}^3 = 1.00646 \text{ Kg/m}^3$

Portanza ala: $L_W = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot C_{L \text{ ALA}} \cdot S = 0.5 \cdot 1.00646 \cdot 86.31^2 \cdot 0.53 \cdot 101.35 \text{ N} = 201367 \text{ N}$

Resistenza velivolo: $D = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot C_{D \text{ VEL}} \cdot S = 0.5 \cdot 1.00646 \cdot 86.31^2 \cdot 0.032 \cdot 101.35 \text{ N} = 12158 \text{ N}$

Equazione di equilibrio alla rotazione (rispetto al punto sulla verticale del baricentro e sulla linea della trazione):

$$L_W x_1 + L_T x_2 + D y_3 = 0$$

Da cui : $L_T = -L_W \cdot x_1/x_2 - D y_3/x_2$
 $= - (201367 \cdot 0.707/12.54 + 12158 \cdot 0.610 /12.54) \text{ N} = -11944 \text{ N}$

La coda è pertanto deportante. Il valore della portanza del piano di coda è circa 1/20 (5%) della portanza generata dall'ala.

Supponendo $y_3 = 0$ risulterebbe invece $L_W x_1 + L_T x_2 = 0$, da cui:

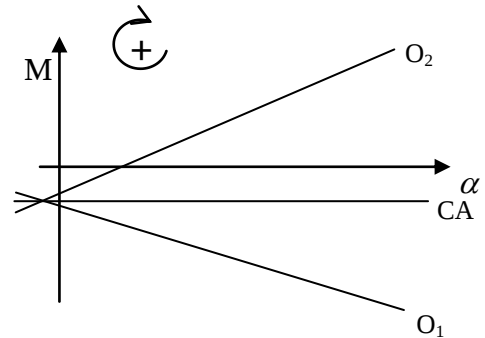
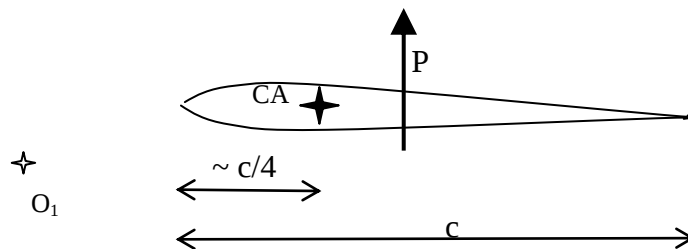
$$L_T = -L_W \cdot x_1/x_2 = -201367 \text{ N} \cdot 0.707/12.54 = -11353 \text{ N}$$

ESERCIZIO 2 – Momento aerodinamico e coefficiente di momento

Il momento originato dalla portanza creata dall'ala, calcolato rispetto a un qualsiasi punto O (detto polo), varia *linearmente* con l'incidenza α . La *pendenza* di questa linearità dipende però dalla posizione di O. Ad esempio, se O è davanti all'ala, il momento è a picchiare, e cresce linearmente in valore assoluto all'aumentare di α ; se invece O è a valle dell'ala, il momento è ancora a picchiare per piccoli valori di α , ma cresce linearmente e diventa a cabrare quando α aumenta. Infatti all'aumentare di α la portanza aumenta e il suo punto di applicazione avanza lungo il profilo.

Esiste un particolare punto, chiamato *centro aerodinamico* (CA), tale per cui il momento della portanza calcolato rispetto ad esso è *costante* al variare dell'incidenza. Il grafico accanto mostra come varia il momento della portanza sull'ala, al variare dell'incidenza, usando come polo:

- un punto O_1 , avanti il CA,
- il centro aerodinamico CA,
- un punto O_2 , dietro il CA.



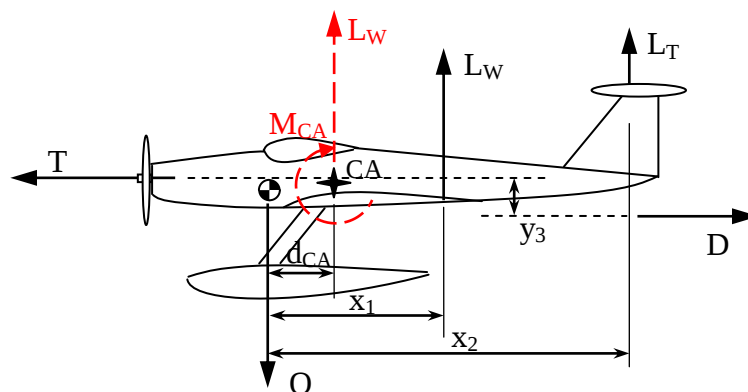
La dipendenza è sempre lineare, ma solo se si usa il CA come polo il momento è costante al variare dell'incidenza. Se la pressione dinamica varia, il momento della portanza, calcolato rispetto a qualunque polo, naturalmente cambia. Tuttavia, il momento della portanza, se calcolato rispetto al CA, non varia al variare dell'incidenza.

Definiamo il *coefficiente di momento aerodinamico* rispetto al *centro aerodinamico* (C_{MCA}). Esso è il rapporto fra il momento aerodinamico (rispetto al centro aerodinamico) ed il momento di riferimento $\frac{1}{2}\rho V^2 Sc$, dove $\frac{1}{2}\rho V^2$ è la pressione dinamica, S è la superficie alare e c la corda del profilo:

$$C_{MCA} = \frac{M_{CA}}{\frac{1}{2}\rho V^2 Sc}$$

Il coefficiente di momento aerodinamico rispetto al centro aerodinamico è una caratteristica del profilo, costante al variare dell'incidenza. Esso è un coefficiente adimensionale; infatti, per rendere adimensionale un momento, occorre dividere per una grandezza che abbia le dimensioni $[F][L]$. È quindi corretto, per definire il coefficiente adimensionale C_{MCA} , introdurre una lunghezza e dividere anche per la corda del profilo.

Calcoliamo ora il C_{MCA} dell'ala del velivolo precedente (ESERCIZIO 1).



Il CA è posto dietro al baricentro alla distanza: $d_{CA} = 0.44 \text{ m}$

Calcolo distanza portanza-CA: $d = x_1 - 0.44 \text{ m} = 0.267 \text{ m}$

Assumiamo positivi i momenti se a cabrare. Calcoliamo il momento della portanza alare rispetto a CA:

$$M_{CA} = -L_W \cdot d = -201367 \text{ N} \cdot 0.267 \text{ m} = -53765 \text{ Nm}$$

Per calcolare la corda media c viene data l'apertura alare,

apertura alare: $b = 28.63 \text{ m}$

quindi: $c = S/b = 3.54 \text{ m}$

Calcoliamo infine il coefficiente di momento aerodinamico:

$$C_{MCA} = M_{CA} / (0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot c) = -53765 \text{ Nm} / 1345000 \text{ Nm} = -0.04$$

Per profili convenzionali, C_{MCA} è tipicamente a picchiare.

ESERCIZIO 3 – Calcolo della portanza generata dall'ala e dal piano di coda per una generica condizione di V.O.R.U.

Velivolo dell'esercizio precedente (ESERCIZI 1 e 2), considerando trazione e resistenza allineate ($y_3 = 0$).

Condizione di volo: quota $z = 0 \text{ m}$,
 $V = 100 \text{ m/s}$.

SOLUZIONE

È necessario considerare che: $L_W + L_T = Q$ (equilibrio in direzione verticale)

Dall'ESERCIZIO 2 possiamo calcolare il peso del velivolo:

$$Q = L_W + L_T = 201367 \text{ N} - 11353 \text{ N} = 190014 \text{ N},$$

dove L_W ed L_T sono quelle calcolate nell'ESERCIZIO 1 considerando la trazione e la resistenza allineate.

Ora si imposta il seguente sistema di equazioni, scrivendo i momenti rispetto al CA:

$$\begin{cases} L_W + L_T = Q \\ -Q \cdot d_{CA} + M_{CA} - L_T \cdot d_T = 0 \end{cases}$$

ove $d_T = x_2 - d_{CA} = 12.1 \text{ m}$. Il momento aerodinamico M_{CA} si determina noti il coefficiente di momento aerodinamico (calcolato nell'ESERCIZIO 2), la pressione dinamica, la superficie alare e la corda del velivolo. Risulta

$$q = 0.5 \cdot 1.225 \text{ Kg/m}^3 \cdot (100 \text{ m/s})^2 = 6125 \text{ Pa}$$

$$M_{CA} = q \cdot S \cdot c \cdot C_{MCA} = -87900 \text{ Nm}$$

Risolvendo il sistema di equazioni:

$$L_T = (-Q \cdot d_{CA} + M_{CA}) / d_T = -14174 \text{ N}$$

$$L_W = Q - L_T = 204188 \text{ N}$$

In questo modo è possibile calcolare l'equilibrio in V.O.R.U. in ogni condizione di volo.

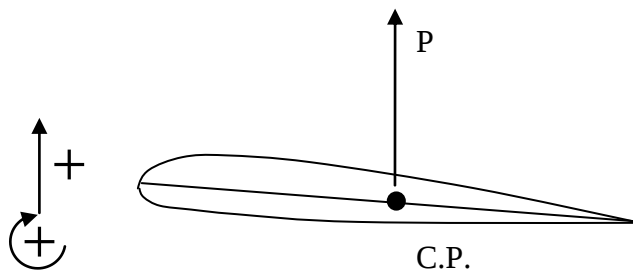
ESERCIZIO 4 – Rilievo del coefficiente di momento aerodinamico di un profilo

Si consideri un modello del profilo NACA 2421 da provarsi in galleria del vento. Le forze aerodinamiche sono ricavate da una bilancia che misura la forza verticale agente sul profilo e il momento al 25% della corda del modello. Si vuole calcolare, con due misure, il coefficiente di momento aerodinamico e la posizione del centro aerodinamico.

DATI:	pressione dinamica:	$q = 551.25 \text{ Pa}$	
	Corda:	$c = 100 \text{ mm}$	
	apertura:	$b = 190 \text{ mm}$	
	misure per $\alpha_1 = 8^\circ$:	$P_1 = 9.95 \text{ N}$	$M_1 = -0.023 \text{ Nm}$
	misure per $\alpha_2 = -8^\circ$:	$P_2 = -6.28 \text{ N}$	$M_2 = -0.054 \text{ Nm}$

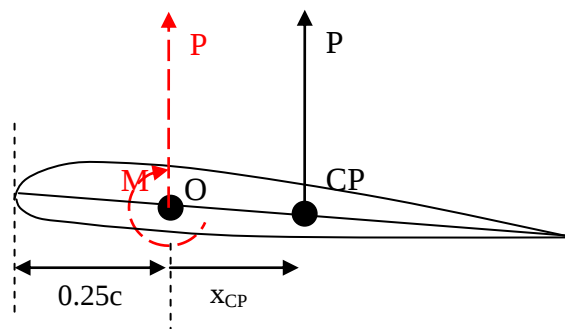
SOLUZIONE

Si trascura il contributo della resistenza, e si ritiene α piccolo, quindi $\cos(\alpha) \cong 1$. La portanza, ossia la risultante della distribuzione di pressione sul profilo, è applicata nel centro di pressione.



Considerando un punto diverso, è possibile determinare un sistema equivalente alla portanza applicata nel centro di pressione, costituito da una forza (di modulo pari alla portanza) e da un momento (pari alla portanza moltiplicata per la distanza tra la retta di applicazione della portanza e il punto considerato).

Con ciò, sapendo che il profilo in galleria è incernierato in corrispondenza del 25% della corda (punto O, che si presume non coincidere con il centro di pressione), con la bilancia si leggeranno sia la portanza che il momento della portanza rispetto ad O.

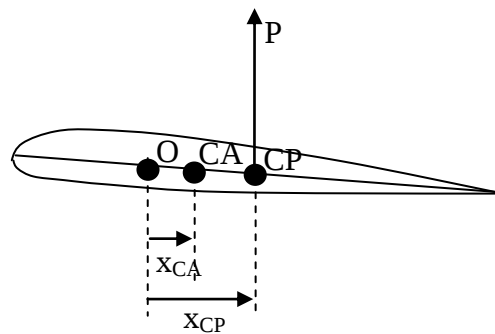


La distanza tra il centro di pressione ed il punto O in cui è incernierato il profilo può essere quindi determinata, dovendo essere $M = -P x_{CP}$:

$$x_{CP1} = -\frac{M_1}{P_1} = -\frac{-0.023}{9.95} \text{ m} = 0.002311 \text{ m} = 2.311 \text{ mm}$$

$$x_{CP2} = -\frac{M_2}{P_2} = -\frac{-0.054}{-6.28} \text{ m} = -0.0085987 \text{ m} = -8.5987 \text{ mm}$$

Consideriamo ora il *centro aerodinamico*. Per definizione, rispetto a questo punto, il momento è costante al variare dell'incidenza. Supponiamo che il centro aerodinamico si trovi tra il punto O, in corrispondenza del quale il profilo è incernierato alla bilancia, ed il centro di pressione CP: x_{CA} è la distanza tra O e CA.



Essendo il momento rispetto al centro aerodinamico uguale nelle due misure, risulta (assumendo positivi i momenti a cabrare):

$$-P_1(x_{CP1} - x_{CA}) = -P_2(x_{CP2} - x_{CA})$$

$$P_1 \left(-\frac{M_1}{P_1} - x_{CA} \right) = P_2 \left(-\frac{M_2}{P_2} - x_{CA} \right)$$

$$-M_1 - P_1 x_{CA} = -M_2 - P_2 x_{CA}$$

Da questa relazione è quindi possibile ricavare x_{CA} :

$$x_{CA} = \frac{M_2 - M_1}{P_1 - P_2} = \frac{-0.054 \text{ Nm} + 0.023 \text{ Nm}}{9.95 \text{ N} + 6.28 \text{ N}} = -0.0019100 \text{ m} = -1.91 \text{ mm}$$

Il CA si trova quindi a sinistra del punto O e ad una distanza pari a $(25 - 1.91) \text{ mm} = 23.09 \text{ mm}$ dal bordo di attacco, ossia al 23.1 %.

Il coefficiente di momento aerodinamico si ottiene dividendo il momento rispetto al centro aerodinamico (costante) per la pressione dinamica, la superficie e la corda:

$$C_{MCA} = \frac{M_{CA}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = \frac{-P_1(x_{CP1} - x_{CA})}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = \frac{-P_2(x_{CP2} - x_{CA})}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c}$$

$$= \frac{-9.95 \text{ N}(0.002311 + 0.00191) \text{ m}}{551.25 \text{ Pa} \cdot (0.100 \cdot 0.190) \text{ m}^2 \cdot 0.100 \text{ m}} = -0.0401$$



Si osservi, inoltre, che il sistema di forze aerodinamiche che generano la portanza sull'ala può essere benissimo descritto in altro modo, cambiando il punto di applicazione della risultante e variando la coppia in modo da ottenere lo stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi. Tuttavia, solo considerando la risultante passante per il centro aerodinamico il coefficiente di momento risulta costante con l'incidenza. Questo fatto rende possibile la rapida impostazione e soluzione del sistema delle equazioni di equilibrio, se x_{CA} e C_{MCA} sono noti.

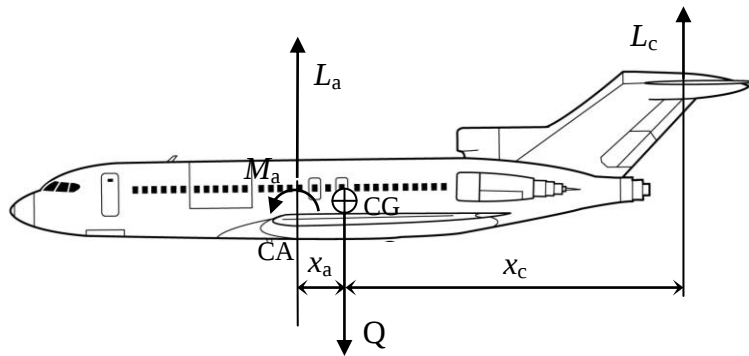
[illegible]

ESERCIZIO 5 – Centraggio del velivolo (dalla prova del 8 Febbraio 2007)

Si consideri un velivolo in volo orizzontale rettilineo uniforme:

quota $z = 1200$ m

velocità $V = 180$ m/s

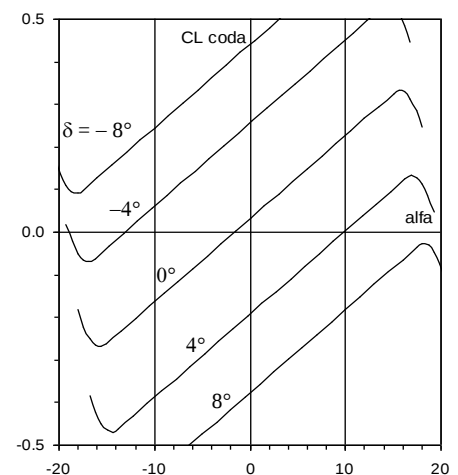
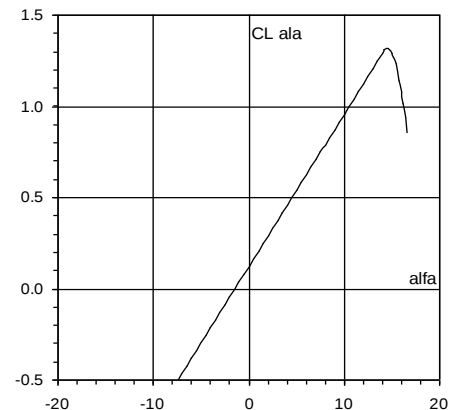


z [m]	ρ [kg/m ³]
0	1.22500
1200	1.09000
2400	0.96673
3600	0.85445
4800	0.75247
6000	0.66011
7200	0.57671
8400	0.50165
9600	0.43433
10800	0.37417
12000	0.31194

Nello schema in figura sono riportati:

- peso Q nel baricentro (CG),
- portanza alare L_a nel centro aerodinamico (CA),
- momento aerodinamico alare M_a rispetto al centro aerodinamico,
- portanza del piano orizzontale di coda L_c .

1. Calcolare la portanza di coda affinché il velivolo risulti in equilibrio attorno all'asse di beccheggio.
2. Utilizzando la curva $C_L-\alpha$ dell'ala, determinare l'assetto del velivolo in questa condizione.
3. Assumendo che il piano di coda si trovi allo stesso angolo di assetto α appena calcolato, ed utilizzando le curve $C_L-\alpha$ del piano di coda (riportate per diversi valori della rotazione δ dell'equilibratore) determinare l'angolo δ all'equilibrio (interpolando linearmente, ove necessario).



Dati velivolo:

peso	Q	= 500 kN
carico alare	Q/S	= 1800 N/m ²
corda media aerodinamica	c_m	= 3.6
coefficiente momento ala	C_{MCA}	= -0.045
distanza CA-CG	x_a	= 0.4 m
distanza CG-coda	x_c	= 13 m
rapporto volumetrico di coda	$V_c = S_c x_c / S c_m$	= 1.1

Innanzitutto si calcolano le superfici dell'ala e del piano di coda:

$$S = \frac{Q}{Q/S} = 277.78 \text{ m}^2,$$

$$S_c = V_c \frac{S_{c_m}}{x_c} = 84.62 \text{ m}^2.$$

Punto 1

Imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione rispetto al baricentro si scrivono le equazioni:

$$\begin{cases} L_a + L_c = Q \\ L_c x_c - L_a x_a + M_a = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene un'espressione per la portanza di coda:

$$L_c = \frac{Qx_a - M_a}{x_a + x_c}.$$

Il momento aerodinamico è pari a $M_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{c_m} C_{MCA} = 794610 \text{ Nm}$, da cui:

$$L_c = -44374 \text{ N}.$$

Si osserva che in questo caso specifico la coda è deportante.

Punto 2

Per calcolare l'assetto è necessario ricavare il coefficiente di portanza dell'ala a partire dal valore della portanza alare:

$$L_a = Q - L_c = 544374 \text{ N},$$

$$C_{La} = \frac{L_a}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = 0.111.$$

L'assetto del velivolo si ottiene cercando graficamente sulla curva $C_L - \alpha$ il punto corrispondente al coefficiente di portanza appena calcolato:

$$\alpha = -0.11^\circ.$$

Punto 3

Per calcolare la deflessione dell'equilibratore è necessario conoscere il valore del coefficiente di portanza del piano di coda.

$$C_{Lc} = \frac{L_c}{\frac{1}{2} \rho V^2 S_c} = -0.03.$$

Noto questo valore e l'angolo di assetto $\alpha = -0.11^\circ$ è quindi possibile ottenere dal grafico, tramite interpolazione lineare, la deflessione dell'equilibratore. Il punto $(-0.11, -0.03)$ si trova tra le due curve a $\delta = 0^\circ$ e $\delta = 4^\circ$. Noti i valori (ottenibili dal grafico) del coefficiente di portanza di coda a 0° e 4° , è possibile operare un'interpolazione lineare e calcolare la deflessione dell'equilibratore, che risulta pari a $\delta = 0.87^\circ$.

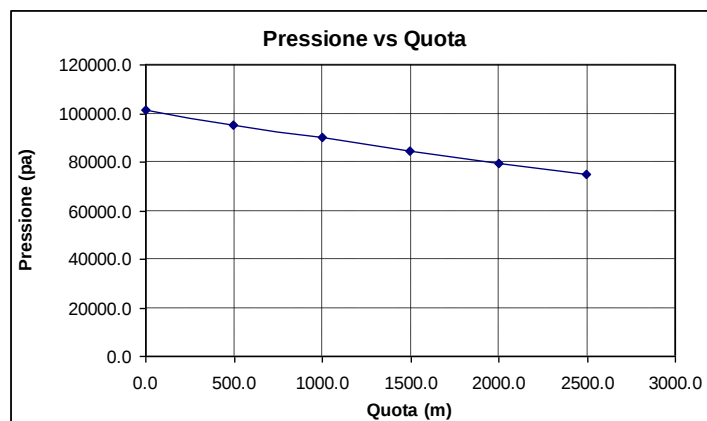
APPENDICE – INTERPOLAZIONE LINEARE

Problema. La seguente tabella fornisce il valore della pressione, a diversi valori della quota, secondo l'Aria Tipo Internazionale. Si vuole conoscere la pressione, alla quota di 1250 m.

quota	pressione
[m]	[Pa]
0	101325
499.8781	95461.02
1000.061	89874.97
1499.939	84556.02
2000.122	79493.01
2500	74682

Metodo grafico

Approssimata della funzione con tratti di retta



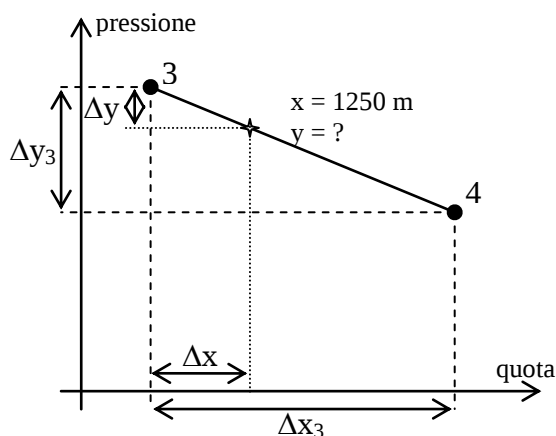
Interpolazione lineare grafica con l'ausilio della carta millimetrata.

Metodo analitico

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} \Delta x$$

$$y = y_3 - \Delta y$$



Attenzione: la curva ha una pendenza negativa quindi all'ordinata del punto 3 occorre *sottrarre* Δy !!!